Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat

1. **(5 баллов)** Петя и Саша едут в соседних вагонах поезда. Петя едет в пятом вагоне от «головы» поезда, а Саша – в седьмом с «хвоста». Сколько вагонов может быть в поезде? Найдите все варианты.

   Ответ: 10 или 12 вагонов
   Решение: Пусть вагоны пронумерованы от «головы» поезда, тогда Петя едет в вагоне номер 5. Так как Саша едет в соседнем вагоне, то номер его вагона либо 4, либо 6. Соответственно, всего в поезде либо $4+7-1=10$, либо $6+7-1=12$ вагонов.

2. **(5 баллов)** В школе все учащиеся сидят за партами по двое, причём у 60% мальчиков сосед по парте – тоже мальчик, а у 20% девочек сосед по парте – тоже девочка. Во сколько раз мальчиков в этой школе больше, чем девочек?

   Ответ: в 2 раза
   Решение: Из условия следует, что у 40% мальчиков сосед по парте – девочка, а у 80% девочек сосед по парте – мальчик. Поэтому 40% мальчиков и 80% девочек – это одно и то же число (равное количеству парт, за которыми сидят мальчик с девочкой). Это означает, что всего мальчиков в школе в 2 раза больше, чем девочек.

3. **(7 баллов)** Винни-Пух, Сова и Пятачок делят между собой воздушные шарики. Сначала Винни-Пух дал каждому из двух других по одной четверти имевшихся у него шариков и ещё полшарика.Затем Сова дала каждому из двух других по одной четверти оказавшихся у неё шариков и ещё полшарика. Затем то же самое сделал Пятачок. В результате у всех оказалось по 30 шариков. Сколько шариков было у каждого из них первоначально?

   Ответ: у Винни-Пуха 14, у Совы 26, у Пятачка 50 шариков
   Решение: На каждом шаге один из персонажей отдаёт половину своих шариков и ещё шарик. Следовательно, перед последней раздачей у Пятачка было $(30+1)\cdot 2=62$, а у Винни-Пуха и Совы – по $30-16=14$ шариков. Перед этим у Совы было $(14+1)\cdot 2=30$, у Винни-Пуха – $14-8=6$, а у Пятачка – $62-8=54$ шарика. Тогда первоначально у Винни-Пуха было $(6+1)\cdot 2=14$, у Совы – $30-4=26$, а у Пятачка – $54-4=50$ шариков.

4. **(8 баллов)** В «мафию» играют 20 человек. В первом туре им раздали по карточке, на каждой из которых написано «мирный житель» или «мафия». Мирные жители всегда говорят правду, а мафия всегда врёт. Во втором туре игрокам раздали те же 20 карточек, после чего 6 человек заявили, что их роль по сравнению с первым туром поменялась, а остальные 14 сказали, что получили ту же самую роль. Сколько могло быть карточек с надписью «мирный житель»? Найдите все варианты.

   Ответ: 14 карточек
   Решение: Человек, получивший в первом туре карточку с надписью «мирный житель», во втором туре в любом случае сказал, что его роль не изменилась. Действительно, если во втором туре он снова стал мирным жителем, то это была правда, а если стал мафией, то он соврал. Аналогично человек, который был мафией в первом туре, во втором туре точно заявил, что его роль поменялась. Значит, в первом туре 14 человек получили карточку с надписью «мирный житель», а остальные – карточку «мафия».

5. **(10 баллов)** Каждую грань кубика разбили на четыре одинаковых квадрата, а затем раскрасили эти квадраты в несколько цветов так, что квадраты, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в различные цвета. Какое наибольшее количество квадратов одного цвета могло получиться?

Ответ: 8 квадратов

Решение: У каждого квадрата одна из вершин совпадает с вершиной кубика. При этом для каждой вершины кубика три смежных с ней квадрата должны быть окрашены в различные цвета. Следовательно, более восьми квадратов не могут быть окрашены в один цвет. При этом если для каждой вершины кубика покрасить один из смежных с ней квадратов в синий цвет, а все остальные квадраты покрасить в различные цвета, отличные от синего, то синих квадратов будет ровно восемь и условия задачи будут выполнены.

6. **(10 баллов)** Некоторую работу выполняют трое рабочих. Второй и третий могут вместе выполнить её в 2 раза быстрее первого, а первый и третий могут вместе выполнить её в 3 раза быстрее второго. Во сколько раз первый и второй могут выполнить эту работу быстрее, чем третий?

Ответ: в 1,4 раза

Решение: Обозначим производительности первого, второго и третьего рабочих через x, y и z соответственно. Тогда условие задачи можно записать в виде системы двух уравнений: $y+z=2x$ и $x+z=3y$. Можно решить эту систему относительно x и y, а можно поступить следующим образом: умножим первое уравнение на 4, второе – на 3 и сложим их. Из равенства $3x+4y+7z=8x+9y$ получим $x+y=1{,}4z$, а это означает, что первый и второй рабочие могут выполнить работу в 1,4 раза быстрее, чем третий.

7. **(12 баллов)** Несколько детей сели за круглый стол. У каждого из них есть яблоки и груши. Известно, что если два ребёнка могут поделить поровну имеющиеся у них яблоки и груши (отдельно и те, и другие; резать фрукты нельзя), то они сидят рядом. Какое наибольшее количество детей может сидеть за столом?

Ответ: 8 детей

Решение: Для каждого ребёнка запишем пару чисел – остатки от деления количества его яблок и груш на 2. Два ребёнка могут поделить поровну имеющиеся у них яблоки и груши только в том случае, когда эти пары чисел у них совпадают. Теперь понятно, что одна и та же пара чисел может быть записана максимум у двух детей, поскольку из трёх всегда найдутся двое, сидящие не рядом (кроме случая, когда детей всего трое, но нам этот случай не интересен, поскольку мы ищем наибольшее количество детей). А так как различных пар может быть всего четыре: (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), то детей за столом не больше восьми. Если каждая из этих четырёх пар присутствует дважды и дети с одинаковыми парами чисел сидят рядом, то все условия выполнены.

8. **(13 баллов)** Вася вырезал из бумаги квадрат со стороной 12 и треугольник. Он смог закрыть квадратом максимум три четверти треугольника, а вот треугольником, как ни старался, смог закрыть только половину квадрата. Какую площадь имеет треугольник?

Ответ: 96

Решение: Расположим фигуры так, чтобы квадрат закрыл наибольшую площадь треугольника. Такое расположение даёт максимальную возможную площадь перекрытия фигур, поэтому и треугольник закрывает наибольшую долю площади квадрата. Следовательно, три четверти площади треугольника равны половине площади квадрата, что равно $12\cdot12:2=72$, откуда получаем, что площадь треугольника равна $72\cdot4:3=96$.

9. **(15 баллов)** В олимпиаде участвовали 100 человек, которым было предложено четыре задачи. Первую задачу решили 90 участников, вторую – 80, третью – 70, а четвёртую – 60. Никто не решил все четыре задачи. Победителями были объявлены все участники, решившие третью и четвёртую задачи. Сколько их было?

Ответ: 30 человек

Решение: Выделим четыре группы участников: в первую включим 10 человек, не решивших первую задачу, во вторую – 20 человек, не решивших вторую задачу, в третью – 30 человек, не решивших третью задачу, и в четвёртую – 40 человек, не решивших четвёртую задачу. Так как никто не решил все четыре задачи, то каждый участник попал хотя бы в одну группу. При этом суммарно в группах 10+20+30+40=100 человек, откуда следует, что эти группы не пересекаются. Значит, есть ровно 30+40=70 участников, не решивших третью или четвёртую задачи, а остальные 100−70=30 участников решили обе эти задачи и стали победителями.

10. (15 баллов) Какое наибольшее количество целых чисел можно записать в строку так, чтобы сумма любых 49 идущих подряд чисел была чётна, а сумма любых 50 идущих подряд чисел была нечётна?

Ответ: 97 чисел

Решение: Из условия следует, что если взять любую группу из 50 идущих подряд чисел, то крайние числа в ней нечётны. Если бы чисел было не меньше 98, то группа из 50 идущих подряд чисел могла бы начинаться с первого числа в строке, со второго, …, с 49-го. Но тогда все эти 49 чисел были бы нечётными, их сумма тоже нечётна, что противоречит условию. Значит, можно записать не более 97 чисел. Если записать в строку 48 единиц, нуль и ещё 48 единиц, то каждая группа из 49 или 50 идущих подряд чисел будет содержать нуль, стоящий на 49-м месте, поэтому суммы в таких группах будут чётными и нечётными соответственно.